MAI 1 – 1. cvičení

I. Něco z výrokového a množinového počtu:

1. Vysvětlete a pak negujte: ($a_n \in R$, $n \in N$)

   a) $\exists c>0 \ \forall n \in N: \ |a_n| \leqq c$;

   b) $\exists c>0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n \in N: \ n>n_0 \Rightarrow |a_n| \leqq c$;

   c) $\forall c>0 \ \exists n_0 \in N \ \forall n>n_0: \ |a_n| < c$;

   d) $\exists n_0 \in N \ \forall c>0 \ \forall n>n_0: \ |a_n| < c$.

2. Rozhodněte o pravdivosti a negujte:

   a) $\forall x \in R: \quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$;

   b) $\forall n \in N: \quad n^2$ liché $\Rightarrow$ n liché.

3. Ukažte, že následující výroky jsou ekvivalentní:
   (a zapamatujte si)

   (i) $V \Rightarrow W$; (ii) $\neg W \Rightarrow \neg V$; (iii) $\neg V \vee W$; (iv) $\neg(V \wedge \neg W)$.

4. Ukažte, že platí: (A, B, C jsou množiny)

   a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

   b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

   c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;

   d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

   e) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

5. Buď $A = \{a \in R;\ |a-1| < 2\}$ a $B = \{b \in R;\ |b+2| \geqq 2\}$.
   Najděte množiny $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $A \times B$.

II. Absolutní hodnota (v $\mathbb{R}$):

1. Ukažte, že pro libovolná $a, b, c \in R$ platí:

$$|a| = \max(a, -a);$$
$$a \leqq c \wedge -a \leqq c \Rightarrow |a| \leqq c;$$
$$|a+b| \leqq |a| + |b|; \quad |a-b| \leqq |a| + |b|;$$
$$||a| - |b|| \leqq |a-b|;$$
$$|a-b| \leqq |a-c| + |b-c|;$$
$$|ab| \leqq \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

2. V $\mathbb{R}$ definujeme vzdálenost $a, b \in \mathbb{R}$ ($d(a,b)$):

$$d(a,b) = |b-a| \quad (= |a-b|)$$

Ukažte, že pro libovolná $a, b, c \in R$ platí:

(i) $d(a,b) \geqq 0$; $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$;

(ii) $d(a,b) = d(b,a)$

(iii) $d(a,b) \leqq d(a,c) + d(c,b)$ (trojúhelníková nerovnost)

3. Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou:

Vyřešte v $\mathbb{R}$:

a) $||x-2| - 3| = 5$

b) $|x+2| + |x-3| = 7$

c) $x^2 + 2|x-2| - 20 = 0$

d) $4 + 6|x-3| = 5x$

e) $|x-1| < |x+5|$

f) $\left|\frac{x+1}{x-1}\right| \leqq 1$

g) $|x^2+2x-3| \geqq |x^2+3x-4|$

h) $|x-1| < 3 \wedge |x+2| \geqq 4$

4. Vysvětlete (f je reálná funkce, definovaná v $\mathbb{R}$)

a) $\exists a \in R\ \exists \varepsilon > 0\ \forall x \in R: |f(x) - a| < \varepsilon$;

b) $\exists a \in R\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in R: |f(x) - a| < \varepsilon$.

III. Funkce

1. Najděte definiční obory funkcí:

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$; b) $f(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{3-x}\right)$;

c) $f(x) = \ln(\ln x)$; d) $f(x) = \ln(\sin x)$;

e) $f(x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

2. Najděte a načrtněte (v rovině) definiční obory funkcí

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$; b) $f(x,y) = \ln(\sqrt{y+1} - x)$.

3. V $\mathbb{R}$ řešte nerovnice (ln – přirozený logaritmus, log – dekadický)

$\dfrac{1}{x+2} < \dfrac{x}{x-1}$; $x^2 - x + 2 \leqq 0$; $\sqrt{x-2} + x > 4$;

$\sqrt{x^2+2x-3} \geqq \sqrt{x^2+3x-4}$; $\dfrac{\ln|x|}{4-x^2} \geqq 0$; $\dfrac{2-\log x}{1+\log x} \geqq 0$;

$\sin^2 x \leqq \cos^2 x$.

4. Načrtněte grafy funkcí (bez užití diferenciálního počtu):

(i) $|x-1| - |5-x|$; $||x-1|-1|$; $||x-1|-1|^2$; $||x-1|^2-1|$;

(ii) $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right|$; $\dfrac{1}{|x|}+1$; $\dfrac{1}{|x+1|}$;

$\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{1}{x^2+1}$; $\dfrac{1}{x^2}+1$; $\dfrac{1}{(x+1)^2}$; $x + \dfrac{1}{x}$;

(iii) $\sqrt{x}$; $\sqrt{-x}$; $\sqrt{|x|}$; $\sqrt{x^2}$; $\sqrt{x-1}$; $\sqrt{x}-1$; $\sqrt{x^2-1}$;

(iv) e^x ; $e^{|x|}$; $e^{-|x|}$; e^{-x^2} ; $e^{\frac{1}{x}}$;

(v) $\ln(-x)$; $\ln|x|$; $|\ln|x||$; $\ln\left|\frac{1}{x}\right|$; $\left|\ln\left|\frac{1}{x}\right|\right|$;

$\ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$, $\sqrt{1-\ln x^2+\ln^2 x}$;

(vi) $\sin|x|$; $|\sin x|$; $\sin x^2$; $\sqrt{1-\sin^2 x}$;

(pokuste se zhruba) $(\sin x)^2$, $\ln \sin x$, $\frac{1}{1+\sin x}$;

5. Inverzní funkce

Na maximálních možných intervalech najděte inverzní funkci ke funkci f, je-li:

a) $f(x) = x^2+2x+2$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$;

c) $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$; d) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

e) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

6. Matematická indukce

Dokažte (užitím matematické indukce):

a) Pro $n\in N$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$;

b) Pro $n\in N$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$.

c) Pro $n\in N$, $n\neq 3$ platí: $2^n \geqq n^2$.

d) Pro $n\in N$ a $x>-1$ platí: $(1+x)^n \geqq 1+nx$

(Bernoulliho nerovnost)

e) Pro $n\geqq 2$, $n\in N$ platí: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geqq \sqrt{n}$.